ACTES DE LES V TROBADES D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(BARCELONA, SCHCT, 2000), 469-472

# ÀREES I VOLUMS MÍNIMS A LA GEOMETRIA DE J. ZARAGOZÀ

**Eduard Recasens Gallart**
Departament de Matemàtica Aplicada III. Universitat Politècnica de Catalunya

Paraules clau: *Divisió de polígons, triangle mínim, tetràedre mínim.*

Minimum areas and volumes in J. Zaragozà's Geometry

Summary: *The problem of land distribution brought about Euclidean division of polygons in proportional parts. This geometrical problem is treated in the course of history by a great number of mathematicians, between them we find J. Zaragoza (XVII century) who extended the theory to a tetrahedron. The study of this problem led the author to create the concepts of «minimum triangle» and «minimum tetrahedron».*

Key words: *Division of polygons, minimum triangle, minimum tetrahedron.*

Dins la tradició geomètrica Euclidiana cultivada a Espanya pels geòmetres del Col·legi Imperial de Madrid, la *Geometria Magna in Minimis* (1674) de J. Zaragozà conté alguns resultats que són notablement originals. Ja hem citat algunes vegades la seva construcció del Centre Mínim com a model geomètric del Centre de Gravetat (avui conegut com Baricentre Geomètric) i l'ús que en fa en la demostració de certes proposicions de la Geometria Plana i de l'Espai. Allò que avui ens ocupa fa referència a un tema llargament tractat pels matemàtics dels segles passats i que es coneixia amb el nom de «Divisió de Figures en parts proporcionals».

El tema en qüestió té les seves arrels en una qüestió de la vida quotidiana com és el repartiment de terres degut a una herència o a la simple compra-venda de terrenys.

Proclus recorda en el seu *Comentari al llibre primer d'Euclides* que Euclides havia escrit un llibre que versava sobre les pràctiques de mesurament de terres, el seu títol era *Llibre sobre les particions* i fou escrit amb la finalitat d'oferir un procediment pràctic basat en els principis generals de la Geometria.

Aquest llibre d'Euclides no fou conegut a Europa fins a la segona meitat del segle XVI i ho fou a través d'un manuscrit àrab atribuït a Bagdadinus i descobert per John Dee, qui juntament amb Comandino en feren una traducció al llatí, publicada l'any 1570. A partir d'aquesta publicació, molts dels llibres de geometria (fins arribar al segle XX) acostumaven a incloure algunes proposicions sobre «divisió de figures» en el seu contingut. Avui, a més, coneixem el llibre d'Abraham bar Hiià, *Sèfer hibbur hameixihà uehatixbòret,* geòmetra jueu que visqué a Barcelona durant el segle XII i que inclou tot un capítol dedicat a la partició de figures geomètriques planes (amb la finalitat d'ensenyar a repartir terrenys amb justícia). En aquest llibre s'inspirà Leonardo de Pisa, qui també tractà el mateix tema a la *Pràctica Geomètrica* i també ho feren els autors medievals Jordanus Nemorarius i Luca Pacioli.

El geòmetra contemporani de Zaragozà, Andrea Tacquet, tractà el tema de divisió de figures planes en els seus *Elementa geometricae* (1654) i Zaragozà en repeteix algunes d'elles a la *Geometria Magna*, però el tractament demostratiu de Zaragozà és diferent i, a més, fa l'extensió al tetràedre.

A continuació exposaré en línies generals els conceptes de «triangle mínim» i «tetràedre mínim», que són els conceptes bàsics que fa servir Zaragozà pel tractament del tema que ens ocupa i que es troben en els volums II i III de la *Geometria Magna*.

La proposició bàsica és la 14-II. Donats un angle Cmn i un punt F interior a aquest angle, d'entre totes aquelles rectes transversals que passen per F es tracta de trobar aquella que determina un triangle d'àrea mínima (veure figura 1).

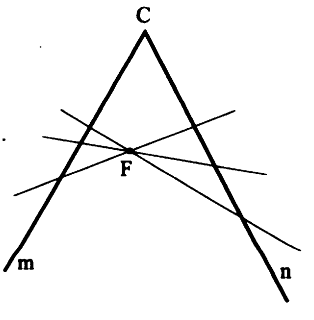



Figura 1

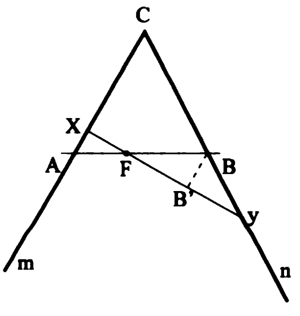



Figura 2

La solució es troba en aquella transversal AFB tal que AF = FB (veure figura 2). I això és així perquè si XFY és una altra transversal per a F, si considerem la projecció B' de B sobre XY paral·lelament a CA, resulta que el triangle FXA és igual al triangle BFB' i, per tant, l'àrea del triangle CAB, que és igual a l'àrea del quadrilàter CXB'B, és menor que la del triangle CXY. Observeu que el segment AFB que tanca l'angle Cmn segons un triangle d'àrea mínima és tal que F resulta ésser el punt mig d'aquest segment, és a dir que n'és el baricentre geomètric, o sigui allò que Zaragozà anomenà «centre mínim». Aquest resultat s'estén a un tetràedre a la proposició 28-III. Diu així: si Vabc és un angle trièdric i F un punt interior del mateix angle, de tots els plans que passen per F, aquell que fa que F sigui el centre mínim (baricentre geomètric) de la secció triangular originada, produeix un tetràedre de volum mínim (veure figura 3). La demostració no és, en absolut, immediata. Zaragozà la fa essencialment en quatre passos que es corresponen amb les proposicions 19, 25, 27 i 28 del volum III.

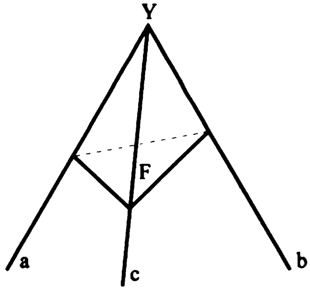



Figura 3

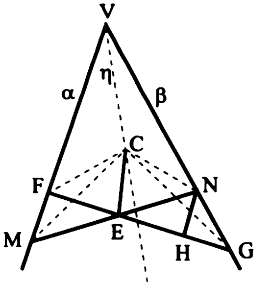



Figura 4

Com a mostra del raonament que segueix donaré el primer pas (veure figura 4): sigui $V\alpha\beta\gamma$ un tríedre i CE un segment que té un extrem en una aresta ($\gamma$ en la figura 4) i l'altre extrem a la cara oposada $V\alpha\beta$. Sigui $\pi$ un pla que passa per CE i talla el tríedre segons una secció triangular CMN. Si aquest pla $\pi$ és tal que ME = EN, llavors, el volum de la piràmide VCMN és menor que el de qualsevol altra piràmide formada en el tríedre per plans que passen per CE.

La demostració consisteix a provar que si el tríedre es talla per un altre pla CFG, el volum guanyat és més gran que el volum perdut (i aquesta és l'argumentació general en totes aquestes proposicions). Així és: el volum guanyat és la piràmide CENG i el volum perdut és la piràmide CFME, ara bé:

piràmide CENG = piràmide CENH + piràmide CNHG, però
piràmide CENH = piràmide CFME ja que triangle FME = triangle ENH.

Zaragozà dona mètodes constructius per a trobar el triangle i el tetràedre d'àrea mínima: en el cas pla (veure figura 5), un dels mètodes consisteix a traçar paral·leles FM, FN als costats i la transversal AFB per F paral·lela a MN dóna el triangle mínim buscat, que és el CAB. En el cas espaial (veure figura 6), donat el tríedre Dabc, si O és un punt del seu interior, es consideren els tres plans FHL, EPR i GKL que passen per O i són respectivament paral·lels a les cares del tríedre. Els punts F, E, G en què aquests plans tallen les arestes formen un triangle FEG. El pla que passa per O i és paral·lel al FEG determina el triangle BAC de centre mínim (baricentre) el punt O (veure facsímil, proposició XXXIII).

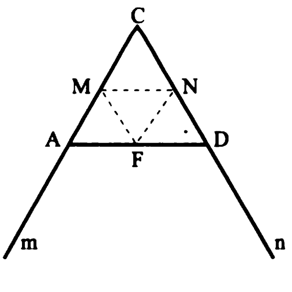



Figura 5

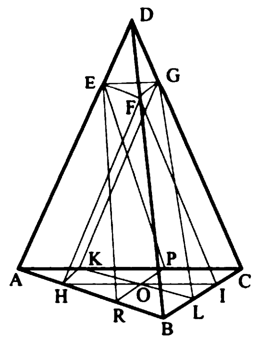



Figura 6

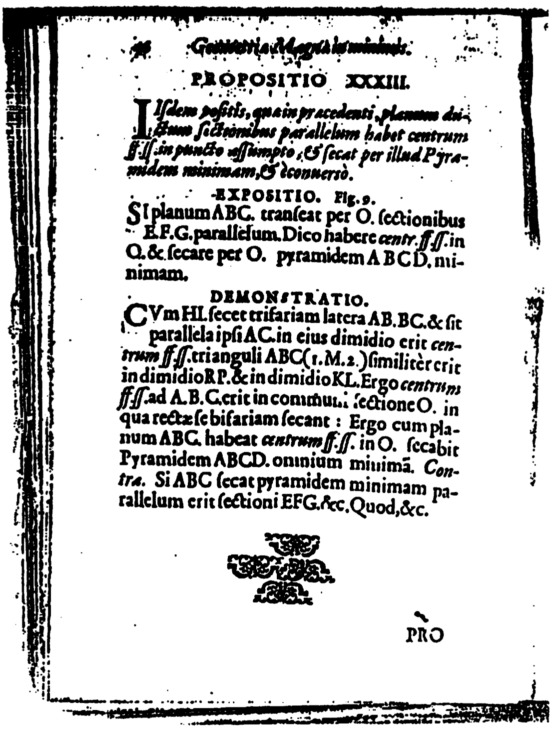
A partir d'aquests resultats l'autor es planteja el problema de quina és la recta transversal que passant per un punt interior o exterior a un angle donat, tanca aquest angle segons un triangle d'àrea donada i, més en general, donats un triangle ABC i un punt F, s'ha de traçar una transversal per F, de manera que aquest triangle quedi dividit en dues parts de raó donada (per tractar aquesta qüestió introdueix el concepte de «triangle mínim absolut»). En el cas d'un tetràedre es tracta de dividir-lo en una certa raó per un pla obligat a passar per un punt o un segment. Les diverses proposicions consisteixen a anar variant la situació del punt o del segment.

## Bibliografia


ARCHIBALD, R.C. (1915), *Euclid's Book on Divisions of Figures*, Cambridge University Press.

TACQUET, Andrea (1669), *Opera Mathematica*, 2 vols., Antwerpiae.

ZARAGOZÀ, Joseph (1674), *Geometria Magna in Minimis*, 3 vols., Toledo.

Geometria Magna in minimis.

PROPOSITIO XXXIII.

*Iisdem positis, quæ in præcedenti, planum dictum sectionibus parallelum habet centrum ff.ff. in puncto assumpto; & secat per illud Pyramidem minimam, & è conuersò.*

EXPOSITIO. Fig. 9.

SI planum ABC. transeat per O. sectionibus E.F.G. parallelum. Dico habere *centr. ff.ff.* in O. & secare per O. pyramidem A B C D. minimam.

DEMONSTRATIO.

CVm HI. secet trifariam latera AB. BC. & sit parallela ipsi AC. in eius dimidio erit *centrum ff.ff.* trianguli ABC (1. M. 2.) similitèr erit in dimidio RP. & in dimidio KL. Ergo *centrum ff.ff.* ad A. B. C. erit in communi sectione O. in qua rectæ se bifariam secant: Ergo cum planum ABC. habeat *centrum ff.ff.* in O. secabit Pyramidem ABCD. omnium minimã. *Contra.* Si ABC secat pyramidem minimam parallelum erit sectioni EFG. &c. Quod, &c.

PRO